1140. 連結こむぱくと可換群ニツイテノ一注意

角谷静夫(阪大)
中山正(名大)

こむぱくと可換群[1]ノ位相群トシテノ構造ガ代数的構造カラドノ程度決定サレルカトイフ問題ヲ考ヘテミマス。

先ヅ，代数的ニ同型ナ二ツノこむぱくと群ニ於テ必ズシモ同相同型ガ存シナイコトハ，例ヘバそれのいど群[2]ト二ツノ全それのいど群ノ直積トヲデモ考ヘレバ両者ハ代数的ニハ同型デアルコトカラ知ラレル。而シテ更ニ、一方ガ連結、他方ガ不連結ナこむぱくと群ハ代数的ニモ決シテ同型ニナラナイコトハ容易ニ知ラレルガ、上記ノ問題ニ関シテ連結ノ場合ト完全不連結ノ場合トハ大体反対的ナ性質ヲ有シテヰルヤウデアリマス。ココデハ先ヅ連結ノ場合ニ限ッテ

こむぱくと連結群 G ハ（自明即チ単位元ノミノ場合及ビ）

---

1) 以下スベテ可換群ノミヲ扱ヒ，単ニ群ト云ッテモ可換群ノコトトスル。

2) 有理数全体ノ（加法）群ノ指標群ナルそれのいど群ヲ假ニ斯ク呼ブ。

「Gが可分デナク且ツ全それのいど群ノ幾ツカ($>\aleph_0$)ノ直和ナル時」

ナル一ツノ例外ノ場合ヲ除ケバ、必ズGト同相同型ニハナラズ代数的ニハ同型ナこむぱくと連結群が確カニ存在スル。上ノ例外ノ場合ニハソノ様ナモノハ存シナイ。

以下コノコトヲ証明シテミル。即チGがこむぱくと群ナルトキ，ソノ各元ノn乗（n倍）ノ全体ノナス部分群ヲG^nデ表セバG^nハGノ閉部分群ナルコト明ラカデアルが、特ニGが連結ナラバ$G^n=G$がスベテノ自然数nニ対シ成立ツ。

何者、G/G^nハこむぱくと群デ而モソノ各元ノn乗が1ダカラ完全不連結、ヨッテソレハ$G\neq G^n$デハ矛盾スルカラデアル。（コノコトハ又指標群ニ有限ノorderノ元ノナイコトカラモ明ラカデアル）。他方完全不連結こむぱくと群GデハスベテノG^nノ共通分ハ1ノミダカラ、一般ノこむぱくとGニツイテハ$\bigcap_n G^n$が丁度1ノ連結成分ニナル。コノ考察カラ連結こむぱくと群ト連結デナイこむぱくと群ハ決シテ代数的ニモ同型ニナラナイコトが明カデアル。

扨テ，Gヲ連結こむぱくと群トスル。先ヅソレヲ単ニ代数的ナ群ト見テソノ構造ヲシラベヨウ。Gノ有限ノorderノ元全体ノナス部分群ヲHトスレバ、明ラカニHモ任意ノnニ対シテ$H=H^n$ヲ充スカラHハGノ直和因

子トナリ $G = H \oplus K$ トナル。[3] 更ニKハ G/H ニ同型デアルカラ矢張リスベテノ n ニ對シ $K = K^n$ ヲ充ス、而カモKハ *torsionsfrei* デアル。因ッテ(例ヘバ脚註3)ノ定理ヲ繰返シ適用シテ)。Kハ有理數(全体)ノ加法群Rノ幾ツカ(ソノ濃度ヲ m トスル)ノ制限直和ニナル。(制限 = *restricted*)。

一方 *torsion* 群Hハ各素數 p ニ對應スル *primary* 群ノ制限直和デアル。而シテ各 *primary* 成分 $H^{(p)}$ ガ矢張リ $H^{(p)} = (H^{(p)})^n$ ヲ充スノデ容易ニ知ラレルヤウニ $H^{(p)}$ ハ分母ガ p ノ冪ナル有理數ノ加法群ヲ *mod 1* デ考ヘタ群 S_p ノ幾ツカ(ソノ濃度ヲ m_p トスル)制限直和ニナル。[4] 即チ結局

$$G = \sum_m^{\circledR} R \oplus \sum_p^{\circledR} \sum_{m_p} S_p$$

トナル。(但シ ⓡ ハ制限直和ノツモリ。マタ p ハスベテノ素數ノ上ヲワタルトスル。

---

3) 任意ノ(代數的)群ニオイテ、スベテノ n ニ對シ $A^n = A$ ヲ充ス部分群Aハ直和因子ニナル。例ヘバ R. Baer. Ann. Math. 37. §1 參照。

4) 例ヘバ, L. Zippin. Ann. Math. 36, §1 參照。S_p ハソコノ *simple root group* デアル。(Zippin ノ論文ハ本質的ニ可附番ノ場合ダガ, コノコトニ關シテハ一般ニツイテ同様)

故ニ，コヽニ m ハ G 自身ノ濃度ト一致シ，而モ G ノ指標群 X ノ濃度ヲ n トスレバ $m = 2^n$ トナル。何故、先ヅ G ノ濃度ガ、從ッテ勿論 m ガ $\leqq c^n = 2^n$ ナルコトハ G ノ各元ハソノ指標ノスベテニ對スル値デキマル事カラ明カデアル。[4')]

他方ノ不等号ヲ証明スルタメ，先ヅ X ニ於テ互ニ独立[5)]ナ元ノナス極大ナ系 Y ヲ一ツ考ヘル。カヽル Y ノ存在ハ明ラカデアル。先ヅ Y ガ無限集合ノ時ヲ考ヘヨウ。然ラバ Y ノ（有限個ノ）元ノ一次結合ノ全体ノナス部分群 X_1 ハ Y ト同ジ濃度ヲ持ツガ，X ノ任意ノ元ハ適當ナ有理整數（$\neq 0$）ヲ掛ケレバ X_1 ノ元トナルガ（Y ノ極大性カラ），X ノ元ハソノヤウナ有理整數及ビソノ X_1 ノ元デキマッテ来テシマフカラ、X ノ濃度ト X_1 ノソレト、從ッテ Y ノ夫レト同ジデアル。即チ Y ノ濃度ハ n デアル。然ルニ Y ノ各元ニ對シ任意ニ實數（mod 1）ヲ指定スレバ X_1 ノ指標ガ與ヘラレルガ（Y ノ元ハ独立），ソレハ確カニ X ノ指標（即チ G ノ元）ニマデ拡張出来ル。

コノ考察ニヨリ G ノ濃度ハスクナクモ（從ッテ（上記ニヨリ）丁度）2^n デアル。而モ 若シコヽニ Y ノ元ニ無理數ヲ指定スレバ斯ク得ラレタ G ノ元ハ確カニ無限ノ order

---

4') m, n ハ勿論無限デアル。

5) 有理整數ヲ係數トスル一次結合ノ意味デ。

ヲ有シ、而モ有理數ヲ $mod.$ トシテ合同デナイ實數ヲトッテ得ラレル二元ハ互ニ $mod\ H$ デ合同デナイ。從ッテ G/H 即チ K ノ濃度モ（少クモ，從ッテ丁度）2^n デアル。ヨッテ $K=\sum_m^{(\aleph)} R$ ナル m モ 2^n デアル。（Y ガ有限ノトキハ X ノ濃度即チ n ハ $\aleph_0$ デアリ、上記ト同様ニ $K \cong G/H$ ノ濃度ハ c，從ッテ m モ $= c = 2^{\aleph_0}$ トナルカラコノ場合モ主張ハ成立ツ)．

次ニ各 p ニツキ m_p ハ有限デアルカ，或ヒハ矢張リ $m_p = 2^{n_p}$ ナル n_p ガアル。何者、指標群 X ノ各元ノ p 乗ノナス部分群ヲ X^p トスレバ、剰餘群 X/X^p ハ $order\ p$ ノ巡回群 C_p ノ幾ツカ（ソノ濃度ヲ n_p トスル）ノ制限直和デアル。他方 X/X^p ノ指標ハ G ノ $order\ p$ ノ元デアレガ，逆ニ G ノ $order\ p$ ノ元ハ X/X^p ノ指標デアル。即チ G ノ $order\ p$ ノ元ノ部分群ハ X/X^p ノ指標群デアリ、コレハ C_p ノ n_p 個ノ直和，從ッテ n_p ガ無限ノトキ 2^{n_p} 個ノ制限直和デアル。他方ソレハ $\sum_{m_p}^{(\aleph)} S_p$ ノ $order\ p$ ノ元ノ群ダカラ $m_p = 2^{n_p}$ デアル（但シ n_p ガ有限ナラ $m_p = n_p$）。

カクテ G ノ分解

$$
(*)\quad \left\{
\begin{array}{l}
G = \sum_m^{(\aleph)} R \oplus \sum_p^{(1)} \sum_{m_p}^{(\aleph)} S_p \\[2ex]
m = 2^n\ (n\ \text{無限}),\ \text{各}\ m_p = \text{有限又ハ}\ 2^{n_p}\ (n_p\ \text{無限})\ \text{且ツ}\ n_p \leqq n
\end{array}
\right.
$$

ヲ得ル。

然ルニ，今 $\{q\}$ ヲ素数ノ或ル集合トスルトキ $\{q\}$ 進それのいど群[6] $D_{\{q\}}$ ヲ考ヘルニ、コレハ代数的ニハ

$D_{\{q\}} = \sum_{c}^{(r)} R \oplus \sum_{p \notin \{q\}}^{(r)} S_p$ デアルコトハ容易ニ知ラレヨウ。（特ニ $\{q\}$ が空ナラ $D_{\{q\}}$ ハ實数 $mod\ 1$ ノ群デアル。）

ソコデ，素数ノ集合ノ或ル族 $\{q\}_p$ 及ビ濃度 n_p ヲ採ッテ、各 p ニ對シ

$$\sum_{p \notin \{q\}_p} n_p \begin{cases} = n_p \quad \text{即チ} \quad 2^{\{\aleph \cdots\cdots\}} = m_p \ (m_p \text{無限ノトキ}) \\ = m_p \quad (m_p \text{有限ノトキ}) \end{cases}$$

ナル様ニスル。更ニ濃度 ν ヲ

$$\aleph_0 \cdot \sum_p n_p + \aleph_0 \cdot \nu = \mathfrak{n}$$

ナル如ク採ル。ソシテコレニ應ジテ

$$\sum_p D_{\{q\}_p} \oplus \sum_\nu (\text{全それのいど群})$$

ヲ考ヘルト，コレハ n_p, ν ノトリ方カラワカルヤウニ代數的ニハ G ト同ジ分群ヲモツ．然ルニコノ $(\{q\}_p, n_p, \nu)$ ノ異ナル系ニ對應スル二群ハ同相同型ニハナリ

6) 分母が $\{q\}$ 中ノ素数ノ巾ノ積ナル有理數ノ群ノ指標群.

得ナイ。[7] ヨッテソノ様ナ異ナル二ツノ系が得ラレルトキニハ G ニハ確カニ同相同型ニハナラナイが，代数的ニ同型ナ群が存在スルワケデアル。

扨テ，コヽニ少クモ二ツノ p ニ對シ $n_p \neq 0$ ナラ確カニ異ナル二ツノ系が得ラレルカラ，ソレデヨイ。只一ツノ p ニツイテノミ $n_p \neq 0$ ナルトキモ，若シソレが $n_p \geq 2$ ナラバ二ツノ $D\{q \neq p\}$ ノ直和ノ代リニソレト代数的ニハ同型ナ二次元ノ連結こむぱくと群デ直和分解不能ナ(從ッテソレト同相同型ニハナラナイ)モノ[8] ヲ使ヘバ矢張リ元モ与 G ト代数的同型デ互ニ同相同型デナイモノが二ツ出来ルカラヨロシイ。

更ニ，タヾ一ツノ n_p ノミ $\neq 0$ デ而モ $=1$ ノトキ，或ヒハスベテノ $n_p = 0$ ノトキデモ，若シ G が可分，即チ $n = \aleph_0$ ノトキハ，$\varkappa$ トシテ任意ノ有限濃度 (>0) 或ヒハ $\aleph_0$ ト出来ルカラ，矢張リ同相同型デナイモノが得ラレル。

更ニ，$n > \aleph_0$ デ唯一ツノ n_p ノミ $\neq 0$ デ且ツソレが $n_p = 1$ ノ時デモ，即チ

$$G = S_p \oplus \sum_{m}^{\otimes} R \qquad (m = 2^n,\ n > \aleph_0)$$

---

7) 指標群ヲ考ヘレバヨイデアラウ。

8) 二ツノ独立ナ元ヲ有シ，且ツ p ト異ナル q ニ對シテハ常ニ $X^q = X$ トナリ，而シテ直和分解不能ナル X ノ指標群。

ノ時デモ，先ヅ二ツノ（discrete ナ群）

(1)　（分母ガ p ト素ナ有理数ノ群）$\oplus \sum_{n}^{(\gamma)} R$

(2)　（p 進整数ノ群）$\oplus \sum_{n}^{(\gamma)} R$

ヲ考ヘルト，ソノ両者ノ指標群ノ代数的構造ハ共ニ上ノ G ト一致スル。何者，(1) ノ指標群ハ $D_{\{g \neq p\}} \oplus \sum_{n}$（全それのいど群）ダカラ，ソレハ明ラカデアル。(2) ニツイテ，p 進整数ノ（加法）群ヲ A_p デ表ハセバ $g \neq p$ ニ対シテハ $A_p^g = A_g$ デアルカラソノ指標群ニハ order g ノ元ハナイ。即チソノ (米) ノ形ノ分解ニオイテ $g \neq p$ ナル S_g ハ出テ来ナイ。更ニ S_p ニツイテモ只一ツシカ出ナイコトハ A_p / A_p^p ガ order p ノ cyclic 群ナルコトカラワカル。従ッテ A_p ノ指標群ナルこむぱくと群ノ代数的構造ハ $S_p \oplus \sum_{2^c}^{(\gamma)} R$ トナル。従ッテ (2) ノ指標群ノ代数的構造ハ $S_p \oplus \sum_{2^c}^{(\gamma)} R \oplus \sum_{2^n}^{(\gamma)} R$ デ，ココニ $n \geqq c$ ダカラ G ノ構造ニナル。

処ガ (1) ト (2) ハ同型デナイ。何者，(1) ノ群ハソレヲ X デ表ハシタトキ $X / \cap X^{p^m} \cong$（分母ガ p ト素ナ有理数ノ群）トナルガ，(2) ノ群デハ $X / \cap X^{p^m} \cong$（p 進整数ノ群）トナルカラデアル。

カクテ G ノ二ツノ位相ヅケハ同相同型ナ群ヲ與

ヘナイ。[8')]

タゞ最後ニ一ツ困ル場合ハ $n > \aleph_0$ デ，而モスベテノ $n_p = 0$，即チ $G = \sum_{m}^{(\aleph)} R$ $(m = 2^n,\ n > \aleph_0.)$ ノ場合デアル。例ヘバGガ n 個ノ全それのいど群ノ直和ナルトキハ代数的ニカヽル構造ヲモツ。然ルニ逆ニGノ代数的構造ガサウデアレバ，Gハ n 個ノ全それのいど群ノ直和デナケレバナラナイ。

何者、ソノヤウナGノ指標群ヲXトスレバ任意ノ n ニ對シ $X = X^n$ デアル。ソレハ若シ $X \neq X^n$ ナラ X/X^n ノ指標デ 0－指標デナイモノガアリ、ソレハ order ガ高々 n（即チ有限ナル）Gノ元ヲ與ヘルコトニナリGノ（代數的）構造ニ反スルカラデアル。カクXハ $X = X^n$ ヲ充タシ且ツ有限ノ order ノ元ガナイカラXハ有理數ノ加法群ノ幾ツカノ制限直和デアリ、Gハ同個數ノ全それのいど群ノ直和デアル。ソノ個數ガ n ト一致スルコトハ明カデアラウ（但シ連續体假定ヲ假定スル）。斯クテコノ場合Gト代數的ニ同型ナモノハ必ズGト同相同型ニナッテ了

8') 以下イサヽカ苦シマギレニ色々ナ群ヲモチ出シテ来テ統一ヲ缺イタガ，（こおぱくと連結群ノ指標群ナル）torsionsfrei ナ群ノ一般論ノ未ダ存在シナイ現状トシテマタ止ムヲ得ナイノデハナカラウカ？

ヲ。

以上デ結局我々ノ最初ニ述ベタ主張ガ証明サレタワケデアル。

ナホ、以上ノGノ分析ノ結果ナル、或ル代数的ナ群ガこむぱくと連結群ナルタメノ必要且ッ充分ナ構造ハ(※)ナル形ヲ有ツコトデアルトイフコトモ一寸興味アラウ。

ナホ、局所連結性ヲ假定スレバ，二ッノ代數的ニ同型ナ連結且ッ局所連結こむぱくと群ハ必ズ同相同型デアルコトハ直チニ知ラレル。

(以上スベテ群ト云フノハ可換群デアル)。